

# Tính toán dao động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động va đập

## Calculating vibration of impact-resistant engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order

Ngày nhận bài: 05/2/2020

Ngày sửa bài: 29/3/2020

Ngày chấp nhận đăng: 26/5/2020

Trần Thị Trâm,  
Bùi Thị Thúy

### TÓM TẮT:

Nhiều máy móc trong kỹ thuật được thiết kế dựa trên các nền đàn nhớt để làm giảm dao động của móng. Với các vật liệu mới, các mô hình giảm chấn được tính toán với phần tử đạo hàm cấp phân số. Thực tế rằng đối với những biến dạng lớn, đáp ứng phi tuyến xuất hiện. Quy luật dao động của móng máy không còn đơn thuần là quy luật tuyến tính, thay vào đó là quy luật phi tuyến. Việc thiết lập và giải các phương trình vi phân mô tả đặc tính dao động phi tuyến của cơ hệ là rất cần thiết trong việc thiết kế các kết cấu phức tạp hơn liên quan trực tiếp đến nhiều ngành khoa học kỹ thuật.

Bài báo dựa trên lý thuyết của đạo hàm cấp phân số và phương pháp số Newmark để giải phương trình vi phân dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động va đập.

**Từ khóa:** dao động, móng máy, cấp phân số, va đập

### ABSTRACT:

Many machines are designed based on viscoelastic foundation to damp vibration of foundation in engineering. For new materials, damping models are calculated through terms of fractional derivative. In fact, nonlinear response occurs for large deformation. Motion of engine foundation is represented by nonlinear law. Therefore, establishing and solving fractional differential equations which describe properties of vibrational systems are very indispensable in designing more complicated structures in sciences.

Based on the theory of fractional derivative and the numerical method of Newmark, the numerical solution of vibrational differential equation is obtained. Then, we can research vibrational properties of impact-resistant engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order.

**Keywords:** vibration, engine foundation, fractional order, impact

Trần Thị Trâm, Bùi Thị Thúy

Trường Đại học Mở - Địa chất, email:

[tranthitram@humg.edu.vn](mailto:tranthitram@humg.edu.vn)

### 1. Mở đầu

Trong kỹ thuật nói chung, nhiều máy móc được thiết kế, cấu tạo dựa trên các mô hình giảm chấn đàn nhớt cấp nguyên Kelvin-Voigt, mô hình Maxwell và mô hình tuyến tính tiêu chuẩn... Tuy nhiên với sự phát triển của khoa học công nghệ nói chung và cơ học nói riêng, càng ngày càng có nhiều vật liệu mới ra đời (như cao su tổng hợp, silicone...), những mô hình đàn nhớt cổ điển với đạo hàm cấp nguyên không thể hiện được đầy đủ tính chất của vật liệu. Do đó để giải quyết vấn đề này, đạo hàm cấp phân số được áp dụng.

Các vấn đề nghiên cứu về đạo hàm cấp phân số khá đa dạng, cũng có nhà khoa học nghiên cứu về dao động phi tuyến của mô hình cấp phân số. Tuy nhiên chưa có đề tài nào nghiên cứu về dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động va đập. Bài báo này nghiên cứu và tìm ra nghiệm của phương trình vi phân dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động va đập.

### 2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân cấp hai

Véc tơ trạng thái của hệ ở thời điểm  $t_{n+1} = t_n + h$  được suy ra từ véc tơ trạng thái của hệ đã biết ở thời điểm  $t_n$ , qua các khai triển Taylor của dịch chuyển và vận tốc.

Ta có các công thức xấp xỉ theo phương pháp Newmark

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + (1 - \alpha)h \ddot{x}_n + \alpha h \ddot{x}_{n+1}, \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 \ddot{x}_n + \beta h^2 \ddot{x}_{n+1}. \quad (2)$$

#### 2.1. Phương pháp Newmark đối với dao động tuyến tính

Giả sử ta có phương trình dao động tuyến tính của hệ nhiều bậc tự do

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t), \quad (3)$$

Trong đó  $m, c, k$  là các hằng số. Áp dụng các công thức Newmark (1) và (2) vào phương trình trên tại thời điểm  $t_{n+1}$  ta tính được gia tốc  $\ddot{x}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \left[ m + \alpha h c + \beta h^2 k \right] \ddot{x}_{n+1} = f_{n+1} - c \left[ \dot{x}_n + (1 - \alpha)h \ddot{x}_n \right] \\ - k \left[ x_n + h \dot{x}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{x}_n \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được  $\ddot{x}_{n+1}$ . Sử dụng các công thức Newmark (1), (2) nhận được giá trị của vận tốc và độ dịch chuyển  $\dot{x}_{n+1}, x_{n+1}$ .

Ta xác định điều kiện ban đầu của  $\ddot{x}(t_0)$  từ điều kiện ban đầu của

$x(t_0)$  và  $\dot{x}(t_0)$  đã cho như sau

$$\ddot{x} = m^{-1} [f(t) - c\dot{x} - kx],$$

$$\ddot{x}(t_0) = m^{-1} [f(t_0) - c\dot{x}(t_0) - kx(t_0)].$$

## 2.2. Phương pháp Newmark đối với dao động phi tuyến

Giả sử phương trình chuyển động phi tuyến có dạng

$$m(x)\ddot{x} + k(t, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x}), \quad (5)$$

Từ (2) ta rút ra gia tốc  $\ddot{x}_{n+1}$

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2}(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{\beta h}\dot{x}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_n, \quad (6)$$

Thay  $\ddot{x}_{n+1}$  vào (1)

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta h}(x_{n+1} - x_n) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_n + h\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_n. \quad (7)$$

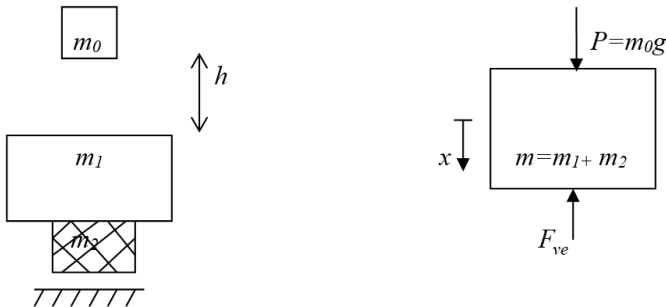
Như vậy gia tốc và vận tốc đều được biểu diễn qua  $x_{n+1}$  và các giá trị đã biết của  $x_n$ ,  $\dot{x}_n$ ,  $\ddot{x}_n$ . Thế vào phương trình (5) ta nhận được phương trình phi tuyến xác định với ẩn là  $x_{n+1}$ . Sử dụng phương pháp lặp Newton – Raphson ta tìm được giá trị của  $x_{n+1}$ . Sau đó sử dụng các công thức gia tốc và vận tốc (6), (7) ta xác định được  $\ddot{x}_{n+1}$  và  $\dot{x}_{n+1}$ .

Điều kiện đầu của  $\ddot{x}(t_0)$  được tìm tương tự như trường hợp dao động tuyến tính thông qua điều kiện ban đầu của  $x(t_0)$  và  $\dot{x}(t_0)$  đã cho.

## 3. Phương trình chuyển động

### 3.1. Phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động và đập

Xét móng máy trên nền đàn nhớt chịu kích động và đập bởi vật nặng có khối lượng  $m_0$  rơi tự do từ độ cao  $h$  xuống (hình 1a).



Hình 1a

Hình 1b

Ta thiết lập phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt theo định luật 2 Newton

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}(t) + F_{ve} = m_0g, \quad (8)$$

Với vật liệu mới, ta có lực sinh ra bên trong vật liệu đàn nhớt

$$F_{ve} = \mu_0(1 + c_1x + c_2x^2)D^p x(t) + kx(t), \quad (0 < p < 1) \quad (9)$$

Thay (9) vào phương trình (8) ta có phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}(t) + \mu_0(1 + c_1x + c_2x^2)D^p x(t) + kx(t) = m_0g, \quad (10)$$

$$\text{Hay } m\ddot{x}(t) + \mu_0(1 + c_1x + c_2x^2)D^p x(t) + kx(t) = m_0g. \quad (11)$$

Trong đó  $m = (m_1 + m_2)$

Vận tốc ban đầu của móng máy sau khi chịu kích động và đập

$$v_0 = \frac{m_0\sqrt{2gh}}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (12)$$

## 3.2. Áp dụng phương pháp Newmark tính toán dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số

Ta có phương trình vi phân dao động cấp phân số

$$mD^2x(t) + \mu_0(1 + c_1x + c_2x^2)D^p x(t) + kx(t) = m_0g, \quad (0 < p < 1) \quad (13)$$

Đặt

$a = \mu_0/m$ ,  $b_1 = c_1\mu_0/m$ ,  $b_2 = c_2\mu_0/m$ ,  $c = k/m$ ,  $f = m_0g/m$ , ta viết lại phương trình chuyển động trên

$$\ddot{x}(t) + aD^p x(t) + b_1xD^p x(t) + b_2x^2D^p x(t) + cx(t) = f, \quad (14)$$

Tiếp đến ta sẽ đi tới việc giải phương trình vi phân chuyển động ở trên bằng phương pháp số Newmark.

Định nghĩa Riemann – Liouville đối với đạo hàm cấp không nguyên

$$D^p x(t) = D[D^{-u}x(t)] = \frac{1}{\Gamma(u)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-u}} d\tau, \quad (15)$$

$$u = 1 - p, \quad 0 < u < 1.$$

Áp dụng quy tắc hợp thành đối với  $D^p x(t)$  ta được

$$D^p x(t) = D[D^{-u}x(t)] = \frac{x(0)}{\Gamma(u)}t^{u-1} + D^{-u}\dot{x}(t), \quad (16)$$

Tính đạo hàm cấp không nguyên  $D^p x(t)$  tại thời điểm  $t = t_n$  ở phương trình (16)

$$\begin{aligned} D^p x(t_n) &= \frac{x(0)}{\Gamma(1-p)}t_n^{-p} + D^{p-1}\dot{x}(t_n) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{x(0)}{t_n^p} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \left[ \int_0^{t_{n-1}} \frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n - \tau)^p} d\tau + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n - \tau)^p} d\tau \right], \end{aligned}$$

Ký hiệu

$$I_0 = \frac{x(0)}{t_n^p} \quad (17)$$

$$I_{n-1} = \int_0^{t_{n-1}} \frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n - \tau)^p} d\tau \quad (18)$$

$$\text{Và } \Delta I_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n - \tau)^p} d\tau \quad (19)$$

Khi đó phương trình  $D^p x(t_n)$  sẽ trở thành phương trình có dạng

$$D^p x(t_n) = \frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0 + I_{n-1} + \Delta I_n) \quad (20)$$

Giả thiết tại thời điểm  $t_n$  phương trình chuyển động của hệ như sau

$$\ddot{x}(t_n) + aD^p x(t_n) + b_1x(t_n)D^p x(t_n) + b_2x^2(t_n)D^p x(t_n) + cx(t_n) = f.$$

với  $x(t_n)$  và  $\ddot{x}(t_n)$  lần lượt là độ dịch chuyển và gia tốc tại thời điểm  $t_n$ .

Với  $t_{n-1} \leq \tau \leq t_n$ , sử dụng khai triển Taylor và ta có thể bỏ qua số hạng bậc cao do  $\tau - t_{n-1}$  giả thiết rằng rất nhỏ

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_{n-1} + (\tau - t_{n-1})\ddot{x}_{n-1}. \quad (22)$$

$\dot{x}(\tau)$  thay đổi trong khoảng  $[t_{n-1}, t_n]$  và ký hiệu  $\dot{x}_n = \dot{x}(t_n)$ .

$$\text{Ngoài ra ta có } \ddot{x}_{n-1} = \frac{(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})}{\Delta t}, \quad \Delta t = t_n - t_{n-1},$$

Thay vào phương trình (22) ta được công thức tính  $\dot{x}(\tau)$  theo  $\dot{x}_n$ ,  $\dot{x}_{n-1}$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_{n-1} + \frac{(\tau - t_{n-1})}{\Delta t} (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}). \quad (23)$$

Sau đó thế phương trình (23) vào phương trình (29), ta được

$$\Delta I_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\dot{x}_{n-1}}{(t_n - \tau)^p} d\tau + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}}{\Delta t} \cdot \frac{\tau - t_{n-1}}{(t_n - \tau)^p} d\tau. \quad (24)$$

Các tích phân trong phương trình (24) bây giờ là những tích phân xác định thông thường và có thể dễ dàng giải được.

Ta có các công thức xấp xỉ theo phương pháp Newmark

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1}, \quad (25)$$

$$\text{và } \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{x}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{x}_n. \quad (26)$$

Bây giờ thay (26) vào (24) ta có

$$\Delta I_n \approx \frac{\Delta t^{1-p}}{1-p} \dot{x}_{n-1} + (1-\alpha) \frac{\Delta t^{2-p}}{(1-p)(2-p)} \ddot{x}_{n-1} + \alpha \frac{\Delta t^{2-p}}{(1-p)(2-p)} \ddot{x}_n,$$

Tiếp theo ta chú ý đến tích phân  $I_{n-1}$  của phương trình (18). Nó là kiểu tích phân chập. Tích phân xác định này có thể được xấp xỉ bằng công thức hình thang như sau

$$I_{n-1} \approx \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\dot{x}_0}{t_n^p} + \frac{\dot{x}_{n-1}}{\Delta t^p} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\dot{x}(i\Delta t)}{(t_n - i\Delta t)^p} \right], \quad n \geq 2.$$

Áp dụng công thức của  $\ddot{x}_n$  ở (25) vào công thức tính  $\Delta I_n$  ở (28) được

$$\Delta I_n \approx \frac{\Delta t^{1-p}}{(1-p)(2-p)} \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta t} (x_n - x_{n-1}) + \left( 2-p-\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} + \left( 1-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right]. \quad (29)$$

Sử dụng công thức Newmark đối với vận tốc  $\dot{x}_n$  trong phương trình (25) cùng với phương trình (20) ta thay vào phương trình (21)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n + \frac{a}{\Gamma(1-p)} \Delta I_n + b_1 x_n \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + b_1 x_n \frac{1}{\Gamma(1-p)} \Delta I_n \\ + b_2 x_n^2 \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + b_2 x_n^2 \frac{1}{\Gamma(1-p)} \Delta I_n + c x_n \\ = f - \frac{a}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}). \end{aligned}$$

Thay  $\Delta I_n$  ở phương trình (29) và  $\dot{x}_n$  ở phương trình (25) vào phương trình trên ta có phương trình tính  $x_n$  như sau

$$\begin{aligned} b_2 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} x_n^3 + \left\{ b_2 \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + b_2 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ -\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( 2-p-\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 1-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + b_1 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} \right\} x_n^2 + \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} + a \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} + b_1 \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) \right. \\ \left. + b_1 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ -\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( 2-p-\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} + \left( 1-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + c \right\} x_n \\ = f - \frac{a}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right] \\ + a \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( p-2+\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} + \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Như vậy ta được phương trình bậc 3 để tính  $x_n$

$$\bar{A}_n x_n^3 + \bar{B}_n x_n^2 + \bar{C}_n x_n = \bar{F}_n. \quad (32)$$

Với

$$\bar{A}_n = b_2 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)},$$

$$\bar{B}_n = \left\{ b_2 \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + b_2 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ -\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( 2-p-\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 1-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + b_1 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} \right\},$$

$$\bar{C}_n = \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} + a \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} + b_1 \frac{1}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) \right. \\ \left. + b_1 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ -\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( 2-p-\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} + \left( 1-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + c \right\},$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n = f - \frac{a}{\Gamma(1-p)} (I_0 + I_{n-1}) + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right] \\ + a \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)} \left[ \frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left( p-2+\frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_{n-1} + \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Giải phương trình trên ta tìm được nghiệm số  $x_n$  của phương trình vi phân dao động  $m\ddot{x}(t) + \mu_0(1 + c_1 x + c_2 x^2)D^p x(t) + kx(t) = m_0 g$ .

hay  $\ddot{x}(t) + aD^p x(t) + b_1 x D^p x(t) + b_2 x^2 D^p x(t) + cx(t) = f$  theo các giá trị của  $x_{n-1}$ ,  $\dot{x}_{n-1}$ ,  $\ddot{x}_{n-1}$  với  $\dot{x}_{n-1}$  và  $\ddot{x}_{n-1}$  được tính như sau

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta \Delta t^2} x_n - \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right] \\ \dot{x}_n = \alpha \Delta t \ddot{x}_n + \left[ \dot{x}_{n-1} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] \end{cases} \quad (33)$$

Giả thiết rằng điều kiện ban đầu của các công thức trên  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$

đã cho.

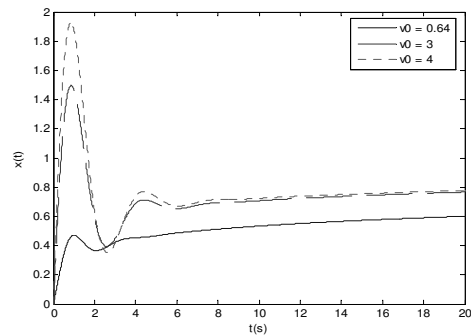
### 3.3. Tính toán số

Với các số liệu

$$m=1, p=0.5, k=1, \mu_0=2, m_0 g=1, h = \frac{x^2(0)(1+9.81m)^2}{2g}, c_1 h=2.44, c_2 h=3.81$$

$$x(0)=0, \Delta t=0.01, \alpha=1/2, \beta=1/4.$$

với các điều kiện đầu  $\dot{x}(0)=0.64, 3$  và  $4$  ta có đồ thị dao động (hình 2).



Hình 2

#### 4. Kết luận

Sau khi tìm được nghiệm số của phương trình vi phân có chứa đạo hàm cấp phân số và qua đồ thị dao động có được, chúng ta có thể rút ra kết luận:

Quá trình dao động của mô hình hoàn toàn phù hợp với đặc tính dao động của hệ chịu cản.

Nhờ việc khảo sát ứng xử phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số, các kết cấu kỹ thuật phức tạp có thể được thiết kế hợp lý, đảm bảo các tiêu chuẩn kỹ thuật.

---

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Văn Khang (2008), "*Bài giảng phương trình vi phân cấp phân số*", Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội.
- [2]. Nguyễn Văn Khang (2004), "*Dao động kỹ thuật*", NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội.
- [3]. H. Nasuno, N. Shimizu (2007), "Power Time Numerical Integration Algorithm for Nonlinear Fractional Differential Equations", pp. 1-32.
- [4]. N. Shimizu, H. Nasuno (2007), "Modeling and Analysis of Nonlinear Viscoelastic Systems by means of Fractional Calculus – Numerical Integration Algorithms", *International Conference on Material Theory and Nonlinear Dynamics*, Hanoi.
- [5]. K. Diethelm (2003), *Fractional Differential Equations*, Vorlesungsskript der TU Braunschweig.
- [6]. Q. Chen, B. Suki, K.N. An (2004), "Dynamic Mechanical Properties of Agarose Gels Modeled by a Fractional Derivative Model", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.126, pp. 666-671.
- [7]. N. Gil-Negrete, J. Vinolas, L. Kari (2009), "A Nonlinear Rubber Material Model Combining Fractional Order Viscoelasticity and Amplitude Dependent Effects", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.76, pp. 110091-110099.